694. Jordan ノ曲線定理ニ就イテ

入江　盛一（北大）

Jordan ノ曲線定理『Jordan 曲線（單一閉曲線）j ハ平面 R ヲ二ツノ領域ニ分チ且ツ各領域ノ境界ハ j ト一致スル』コトヲ次ノ順序デ証明スル。

端点ヲ共有スル二ツノ半直線ハ平面 R ヲ二ツノ角領域ニ分ツコトト角領域ハ辺上ニアル一端ヲ除イテハソノ内部ニ含マレル半直線ニヨッテ二ツノ領域ニ分タレルコトヲ知ッテヰルモノトスル。

§1. $R-j$ ノ各 component ハ j ノ内部又ハ外部デアル。

§2. j ガ線分ヲ含ムナラバ内部ノ component 及ビ外部ノ component ガ存在スル。

§3. $R-j$ ノ component ノ境界ハ j ト一致スル。

§4. j ガ線分ヲ含ムナラバ $R-j$ ノ component ハ高々二ツデアル。

§5. $R-j$ ニハ内部ノ component 及ビ外部ノ component ガ存在スル。

§6. $R-j$ ニハ高々二ツノ component ヨリナイ。

以上ノ中3及ビ6ハ K. Venkachaliengar. A simple proof of the Jordan-curve theorem. (The Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 8 (1937)) ノ方法ニヨル。(Venkachaliengar

ハ多辺形ガ平面ヲ二ツニ分ケルコトヲ假定シテヰル)

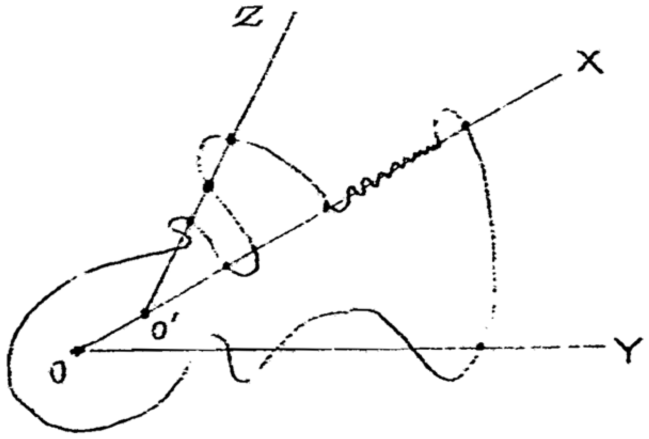
§1. $\boxed{\text{補助定理1}}$ 『Oヲ$R-j$ノ点トスルトキ, jノ部分弧デ夫々二辺OX, OY上ニアル両端ヲ除イテハ角領域XOYニ含マレルモノ*ハ有限個デアル』

証明: j: $z=z(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ デ連続。角領域XOYニ挟マレル弧ノ両端ヲ$z(t_1)$, $z(t_2)$トスレバ

$|z(t_1)-z(t_2)|>\delta$. δガ点Oノ位置及ビ角ノ開キノミニヨツテ定マル常数デアル。コノコトヨリXOYニ挟マレル弧ガ無限ニアルトスレバ$z(t)$ガ$[0,1]$デ一様連続デアルコトハ矛盾デアル。

$\boxed{\text{補助定理2}}$ 『Oヲ共通ノ頂点トスル二ツノ角領域ニ挟マレタ弧ノ数ハ共ニ偶数(Oヲ含ム)又ハ共ニ奇数デアル』

証明: 一辺OXヲ共有シ互ニ外部ニアル二ツノ角領域XOY及ビXOZ(OY及ビOZハ一致シテモヨイ)ニ挟マレテヰルjノ弧ノ数ヲm及ビnトスル。之レ等ノ弧ノ端点ノ中OX上ニアルモノノ数ヲp, コノp個ノ点ノ二ツヲ端点トシOY及ビOZト共通点ヲ持タヌjノ弧ノ数ヲlトスル。m, n, l, p



第一圖

*) コノヤウナ弧ハ角領域ニ挟マレテヰルト云フコトニスル。

ノ間ニハ $m+n+2l=2p$ ナル関係ガアル。故ニ m,n ハ共ニ偶数又ハ奇数デアル。コレヨリ頂点ヲ共有スル二ツノ角領域ノ位置ガ種々ナル場合ニモ挟ム弧ノ数ガ同種（共ニ偶数又ハ奇数）デアルコトハ容易ニ分ル。

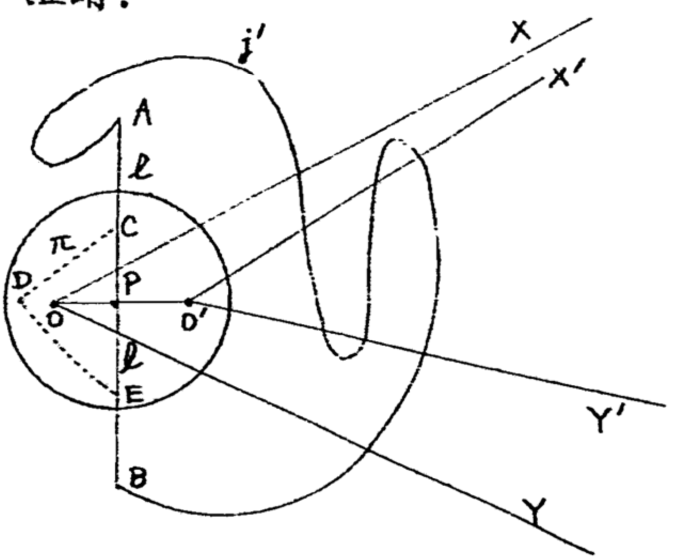
補助定理３　『線分 OO' ガ j' ト共通点ヲ持タナケレバ O 及ビ O' ヲ頂点トスル二ツノ角領域ガ挟ム j ノ弧ノ数ハ同種デアル』

証明：　OO' ノ延長ヲ共通辺トシ互ニ外部ニアル角領域ニ対シテ補助定理２ト全ク同ジニ証明出来ル。（第一圖参照）

定義．　$R-j$ ノ component ハソノ内点ヲ頂点トスル角ガ挟ム j ノ弧ノ数ガ奇数デアルカ偶数デアルカニ従ッテ j ノ内部デアル又ハ外部デアルト云フ。

§2. 補助定理４　『j ガ線分ヲ含ムナラバ j ノ内部ノ component 及ビ j ノ外部ノ component ガ存在スル』

証明：



第一圖

$\overline{AB}=l$ ヲ j ニ含マレル線分，P ヲ l ノ一点トシ $j'-j-l$ ト共通点ヲ持タヌ近傍 $U(P)$ ヲ作ル。又直線 AB ニヨッテ分タレタ半平面ヨリ夫々 O,O' ヲ

$\mho(P)$ 内ニトル。角 $X'O'Y'$ ヲ O' ヲ含ム半平面内ニ，角 XOY ヲ $\mho(P)$ 内デ ℓ ノ一部ヲ挟ムヤウニ作ル。

角 XOY，角 $X'O'Y'$ 及ビ OPO' ト共通点ヲ持タナク j' ト共ニ Jordan 曲線ヲ作ル屈折線 π ヲ作ルコトガ出来ル（第二圖、$\pi = ACDEB$）

角 XOY 及ビ角 $X'O'Y'$ ガ挟ム $\ell + j'$ 及ビ $\pi + j'$ ノ弧ノ数ニハ次ノ関係ガアルコトハ容易ニ分ル(補助定理3)

	$\angle XOY$		$\angle X'O'Y'$
$\ell + j'$	a		d
	$\#$		$\Vert$
$\pi + j'$	b	$=$	c

（$=$ ハ同種ヲ $\neq$ ハ異種（一方ガ偶数，他方ガ奇数）ヲ示ス）。

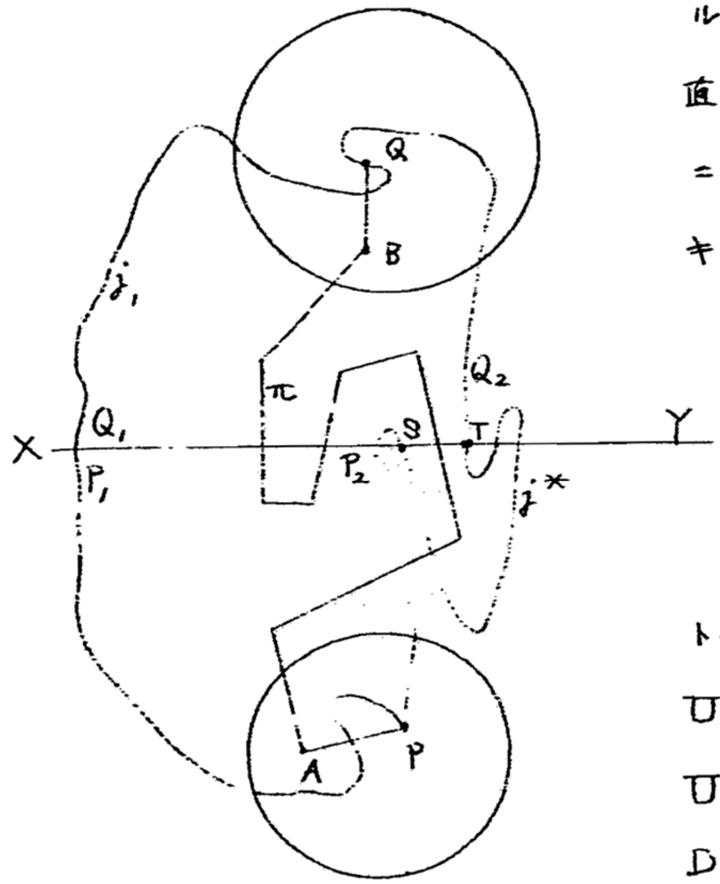
故ニ O ヲ含ム component 及ビ O' ヲ含ム component ハ一方ハ j ノ内部ガ他方ハ j ノ外部デアル。

（注意） O ヲ含ム component 及ビ O' ヲ含ム component ハ何レモ ℓ ヲ境界ノ一部ニ持チ、又 $R-j$ ノ component デ ℓ ヲ境界ニ持ツモノハ此ノ二ツヨリナイコトハ容易ニ分ル。

§3. $\boxed{\text{補助定理5}}$ 『$R-j$ ノ component ノ境界ハ j ト一致スル』

証明： 一ツノ component D ノ境界ガ j ト一致シナカッタトスレバ、両端 P，Q ノミガ D ノ境界点デアルヤ

ウナjノ部分弧j_1ガアル。（第三圖）二点P, Qハ異ナル。XYヲP, Qヲ分ツ直線トシ、P, Qヨリjニ沿ウテ両方ヘ進ンダトキXYト初メテ交ハル点ヲ夫々P_1, P_2; Q_1, Q_2トスル。



第三圖

XY及ビ夫々$j-\widehat{P_1PP_2}$, $j-\widehat{Q_1QQ_2}$ト共通点ヲ持タヌ近傍$U(P)$, $U(Q)$ヲ作ル。$U(P)$, $U(Q)$ニ含マレルDノ点ヲA及ビBトシ、A, BヲD内ノ屈折線πデ結ブ。

πハ直線XYト共通点ヲ持ツ。必要ナラバπヲ少シ変更シテ共通点デハπノ線分トXYトガ交叉シテキルヤウニ出来ル。サウスレバ交点ノ数ハ奇数個デアル。故ニXYトDトノ共通部分ニハπト奇数回交ハル線分$l=\overline{ST}$ガアル。S及ビTハDノ境界点デ従ツテ$j_2=j-j_1$ノ点デアル。S, Tヲ両端トスルj_2ノ弧ヲj^*トスレバj^*ハ$\widehat{P_1PP_2}$, $\widehat{Q_1QQ_2}$ト共通点ヲ持タナイ。Jordan曲線$\bar{j}=l+j^*$ノ補集合ノ中ノlヲ境界ニ持ツcomponentハ二ツアル。(§2注意)。

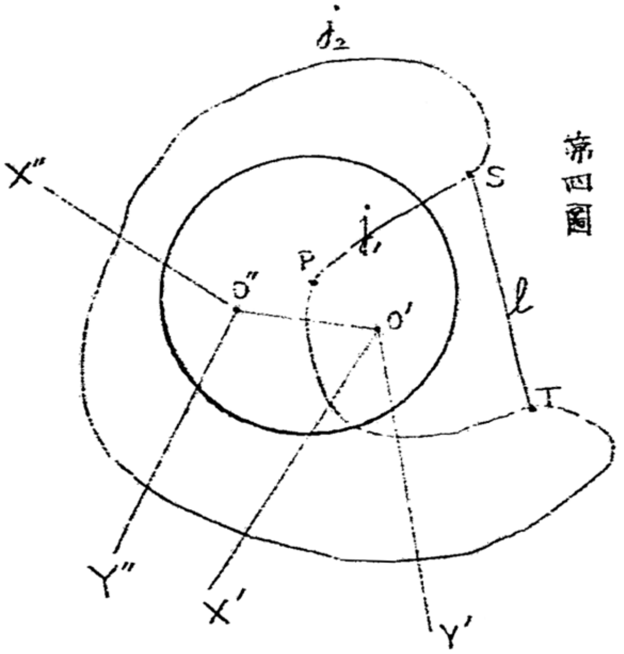
元ハ $\overline{j}$ トハ l ノミト奇数回交叉スルカラ端点A及ビBハ一方ハ $\overline{j}$ ノ内部ニ，他方ハ $\overline{j}$ ノ外部ニアル。コノコトハ $\overline{AP}+j_1+\overline{QB}$ ガ $\overline{j}$ ト交ハラズニA, Bヲ結ンデヰルコトハ矛盾スル。

§4. $\boxed{\text{補助定理6}}$ 『j ガ線分ヲ含ムナラバ $R-j$ ノ component ハ丁度二ツアル』

§2 注意及ビ補助定理5ヨリ明カデアル。

§5. $\boxed{\text{補助定理7}}$ 『$R-j$ ニハ j ノ内部ノ component 及ビ外部ノ component ガアル』

証明： j ノ上ニ適当ニ二点S, Tヲトレバ線分 $l=\overline{ST}$ ハ両端以外ニハ j ト共通点ノナイヤウニ出来ル。j ハ二点S, Tニヨリ二ツノ弧 j_1, j_2 ニ分タレル。Pヲ j_1 ノ一点トシ近傍 $U(P)$ ヲ $j^{**}=l+j_2$ ト共通点ノナイヤウニトル。



第四圖

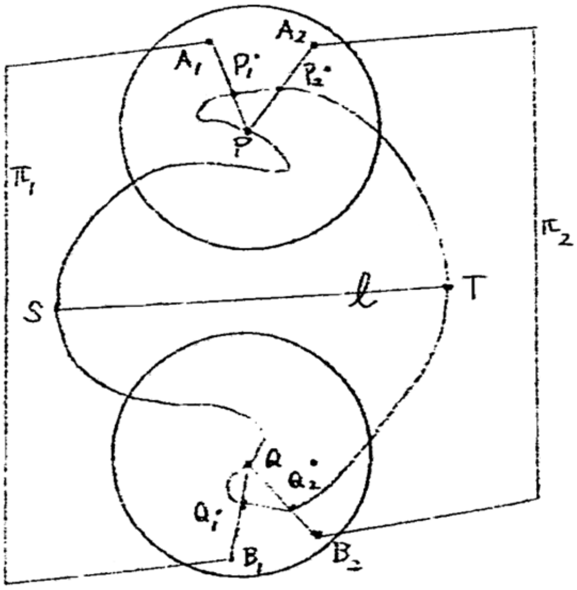
$U(P)$ ニ含マレル $j^*=l+j_1$ ノ内部及ビ外部ノ点ヲ夫々O', O''トスレバ（補助定理4及5）$\overline{O'O''}$ ハ j^{**} ト共通点ヲ持タナイ。l ト共通点ヲ持タナイヤウニ角X'O'Y', 角X''O''Y''ヲ作ル、コノ二ツノ角ニ挟マレル j_1 ノ弧ノ数ハ異種（假定ニヨル）、j_2 ノ弧ノ数ハ同種（補助定理3）デアル。従ッテ $j=j_1+j_2$ ガ挟マレル弧ノ数ハ

異種デ O', O'' ハ一ツハ j ノ内部ニ、他ハ外部ニアル。

§6. $\boxed{\text{補助定理8}}$ 『$R-j$ ニハ高々二ツノ component ヨリナイ』

証明: j ノ上ニ適當ニ二点 S, T ヲトレバ線分 $l=\overline{ST}$ ハ両端以外ニハ j ト共通点ヲ持タナイ。二点 S, T ニヨリ分タレタ j ノ二ツノ弧 j_1, j_2 ノ上ニ夫々 P, Q ヲトリ近傍 $U(P)$ ハ l 及ビ j_2 ト、近傍 $U(Q)$ ハ l 及ビ j_1 ト共通点ヲ持タヌヤウニトル。

$R-j$ ノ component ガ l ヲ含ムモノ以外ニ二ツアッタトシ、ソレヲ D_1, D_2 トスル。$U(P)$, $U(Q)$ ニ D_1 及ビ D_2 ノ点ヲ一点ヅツトリ、ソレヲ夫々 A_1, B_1 及ビ A_2, B_2 トスル(補助定理5)(第五圖) A_1, B_1 ヲ D_1 内デ、A_2, B_2 ヲ D_2 内デ屈折線 π_1, π_2 デ結ブ。



第五圖

A_1P, A_2P ガ j ト初メテ出合フ点ヲ P_1, P_2 トスレバ P_1, P_2 ハ j_1 ノ点デアル。$\widehat{P_1P_2}$ ヲ j_1 ニ含マレル弧トスル。Q_1, Q_2 ヲ j_2 ノ同様ナ弧トスル。

線分 A_1P_1, B_1Q_1 及ビ A_2P_2, B_2Q_2 ハ夫々端点以外ニハ π_1 又ハ π_2 ト共通点ヲ持タヌト假定シテ一般性ヲ失ハナイ。

$j^* = \pi_1\,\overline{A_1P_1}\cdot\widehat{P_1P_2}\,\overline{P_2A_2}\,\pi_2\cdot\ \overline{B_2Q_2},\ \widehat{Q_2Q_1},\ \overline{Q_1B_1}$ ノ補集

合ノcomponentハ丁度二ツアル。(補助定理6)

lヲ含ム方ヲΔ_1, 他ヲΔ_2トスル、jハΔ_1ノ内部及ビ境界上ニ含マレル故ニΔ_2ノ内部デ、従ツテjトハ共通点ナシニπ_1, π_2ヲ屈折線デ結ベルコトニナル、コレハπ_1, π_2ガ$R-j$ノ異ナルcomponentニアルコトハ矛盾スル。

後書:— $R-j$ヲcomponentニ分ケズニ内部及ビ外部ニ分ケルトキ、ソノ存在ト境界ガjト一致スルコトハ比較的簡単ニ分リマスガ連結デアルコトヲ未ダ証明出来ズニ居リマス。(補助定理5ヲ用キズニ)、又近藤基吉氏ノ御教示ニヨレバjノ各点ガ$R-j$ノ各componentノ内部ヨリ到達可能デアルコトヲ§3ノ次ニ簡単ニ証明出来マス。